Seminario de Estadística 1
Tarea Examen

Soriano Flores Antonio

Septiembre 2019

La teoría de riesgo basa sus cálculos actuariales en ciertas funciones de distribución de probabilidad que a continuación se define:

Definición 0.1 (Distribución Beta) *La distribución Beta es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ cuya función de densidad toma valores en el intervalo $[0,1]$ y está definida como:*

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}$$

Cuando X es una variable aleatoria (v.a.) que sigue está distribución lo denotamos como:

$$X \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$$

Algunas de las propiedades más importantes que tiene esta distribución son:

1. $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
2. $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$
3. $\mathbb{E}(X^k) = \prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}$

En ocasiones se tendrá la necesidad de modelar fenómenos aleatorios que no necesariamente tomen valores en el intervalo $[0,1]$, para ello existen transformaciones que se pueden hacer para lograr que una variable aleatoria con distribución Beta tome valores en un intervalo $[a,b]$.

Definición 0.2 (Distribución Beta de 4 parámetros) *Suponga X una v.a. tal que $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, entonces se dice que la v.a. Y con soporte en $[a,b]$ tiene una distribución Beta de 4 parámetros si Y es de la forma:*

$$Y = a + (b-a)X$$

Cuando Y tiene esta característica escribimos $Y \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta,a,b)$. Además se prueba que Y tiene por densidad:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)\frac{1}{b-a} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{y-a}{b-a}\right)^{\beta-1}\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(y)$$

En el contexto que se trabaja en riesgo, las pérdidas asociadas a distintos eventos son por lo general modeladas por variables aleatorias positivas, en este caso se ajusta el parámetro de la Beta para que la v.a. solo tome valores positivos ($a=0$), esto hace que la variable aleatoria solo tenga 3 parámetros asociados (α,β,b) donde α,β son parámetros que dan forma a la distribución y b el parámetro asociado a la máxima pérdida asociada al bien asegurado.

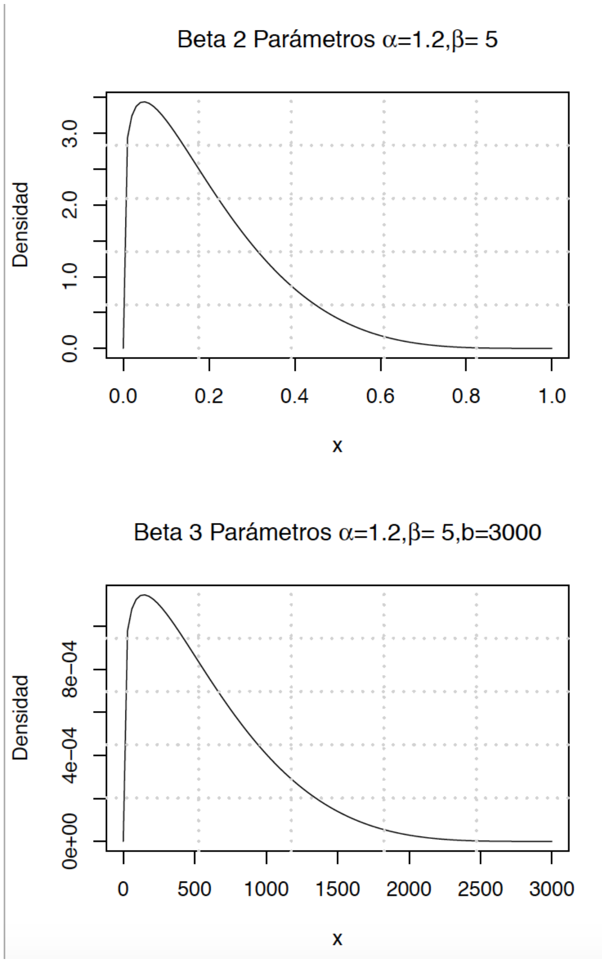

Figura 1: Densidad Beta con 2 y 3 parámetros, las distribuciones tienen la misma forma pero distinto soporte

La Figura 1, muestra dos densidades Beta con 2 y 3 parámetros respectivamente, ambas densidades tienen los mismos parámetros de forma, en el segundo gráfico se observa el efecto que tiene el parámetro $b = 3000$ en la distribución donde ahora el soporte está dado por el intervalo $[0, 3000]$ lo que la hace mas adecuada para la modelación de pérdidas en un portafolio donde la máxima pérdida posible es el parámetro b.

Supongamos que $Y \sim \text{Beta}\,(\alpha, \beta, b)$, entonces pruebe que:

1. $\mathbb{E}(Y) = b\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
2. $\text{Var}(Y) = b^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$

Por ejemplo si $Y \sim \text{Beta}\,(\alpha = 1.2, \beta = 5, b = 3000)$ modela la pérdida de un portafolio, entonces se tendría que la pérdida esperada y varianza son:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 3000\frac{1.2}{1.2+5} = 580.6452 \\
\text{Var}(Y) &= (3000)^2 \frac{(1.2)(5)}{(1.2+5+1)\,(1.2+5)^2} = 195,109.3
\end{aligned}
$$

En este contexto se tendría que cobrar una prima de \$580.6452 pesos para cubrir la pérdida esperada de dicho portafolio.

Suponga que usted trabaja en el área de riesgo de una aseguradora, y quiere encontrar el valor de la prima para un seguro de un bien que tiene un valor máximo de $b = \$100,000$.

Sea X la variable aleatoria que modela la cantidad a pagar por la aseguradora tras la ocurrencia de un siniestro, asuma entonces que

$$X|\alpha, \beta \sim \text{Beta}\,(\alpha, \beta, b = 100000)$$

Donde α y β son parámetros desconocidos del modelo.

A la fecha, la aseguradora ha observado un total de 10 siniestros para este tipo de bienes y a pagado los siguientes montos a cada siniestro:

$$\underline{x} := \{\$8,565.8; \$17,581.7; \$28,852.0; \$6,771.8; \$27,363.6; \$23,703.7; \$24,884.9; \$6,212.3; \$59,258.4; \$11,001.8\}$$

Asumiendo que no tenemos mucha información inicial se deciden utilizar las siguientes distribuciones iniciales para los parámetros desconocidos

$$\alpha \sim \text{Gamma}\,(0.001, 0.0001) \quad \beta \sim \text{Gamma}\,(0.001, 0.0001)$$

Asumiendo que de forma inicial α y β son independientes, realice lo siguiente:

- Escriba un programa en R que por medio del algoritmo aceptación y rechazo visto en clase realice cuando menos 1,000,000 de simulaciones de la distribución final:

  $$p\,(\alpha, \beta|\underline{x}) \propto p\,(\underline{x}|\alpha, \beta)\, p\,(\alpha, \beta)$$

  Kernel a simular:

  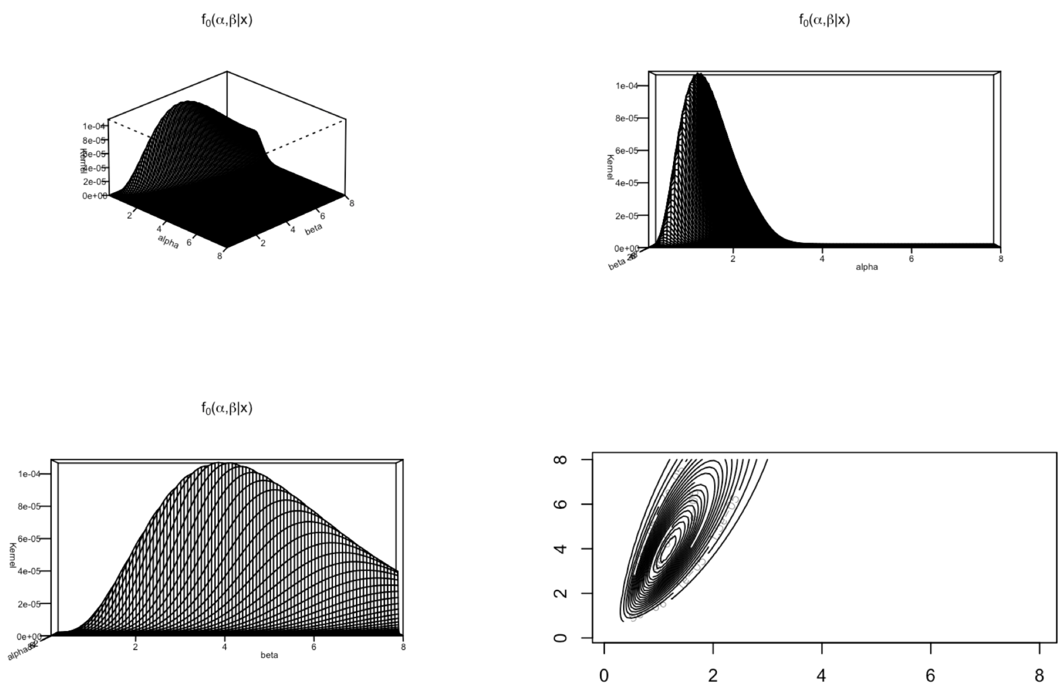

  Figura 2: Grafica del Kernel del cual se quiere obtener al menos 1,000,000 de simulaciones

  Se recomienda transformar la densidad final de tal manera que tenga el mismo soporte que una densidad normal bi-variada. En este caso utilice la transformacion:

  $$(\alpha, \beta) \longrightarrow (\log(\alpha), \log(\beta))$$

  Ejemplo de una Normal Bi-variada que subre al Kernel Transformado.

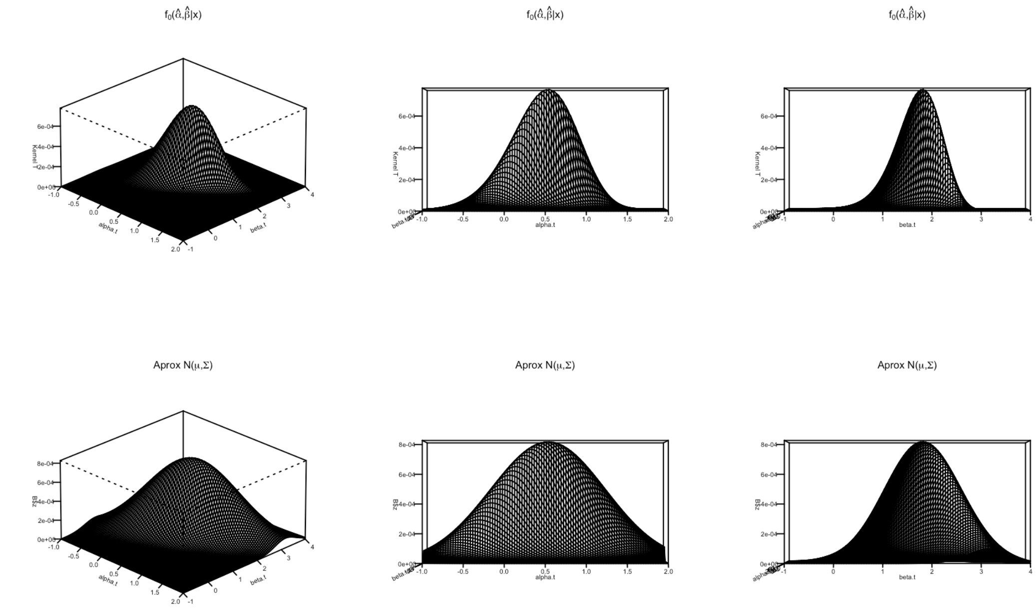

Figura 3: Grafica del Kernel Transformado junto con la Normal ajustada

- Con las simulaciones del punto anterior realice un histograma de la densidad final de α y otro de β (ver figura 4)

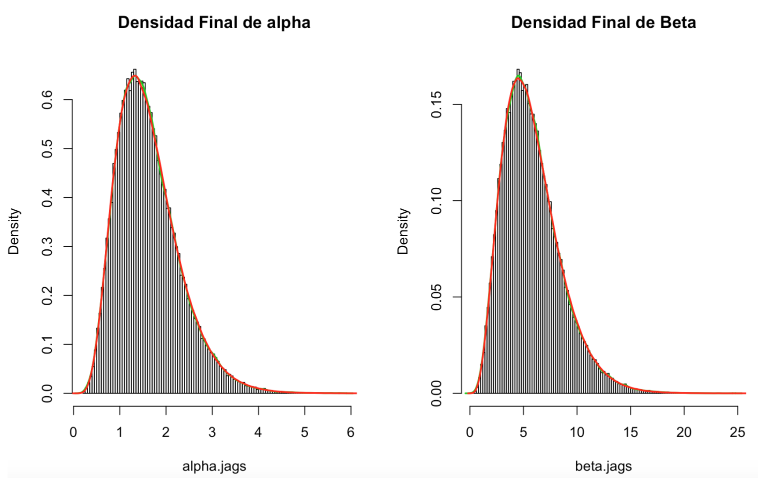

Figura 4: Densidad finales de los parámetros del modelo

- Construya los intervalos de probabilidad al 90 % para los parámetros desconocido (use la función hdi)

- Suponga que está interesado por saber cual será el siguiente monto que tendrá que pagar la aseguradora X_F, simule observaciones de $p\left(X_F|\underline{x}\right)$ y haga el histograma correspondiente, finalmente usando la función hdi construya un intervalo al 80 % de probabilidad para X_F. (Ver figura 5)

- Finalmente, con la simulaciones de $p\left(\alpha,\beta|\underline{x}\right)$, estime la densidad de la esperanza del modelo, es

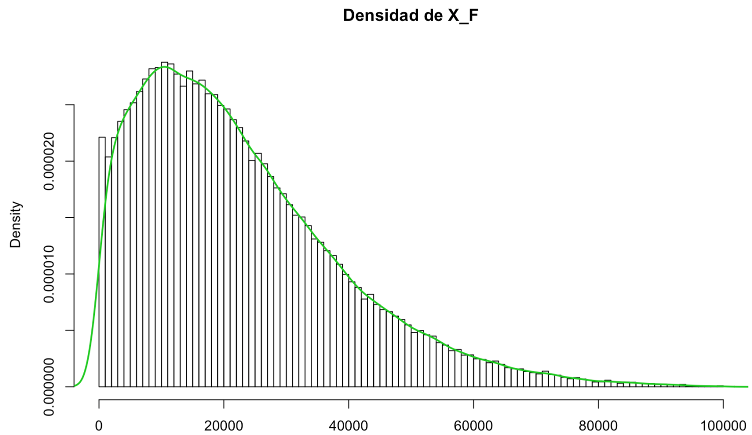

Figura 5: Densidad predictiva final

decir, simule observaciones de la variable aleatoria:

$$P := 100000\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Obtenga el estimador puntual bayesiano de P (Prima a cobrar) suponiendo una perdida cuadrática.

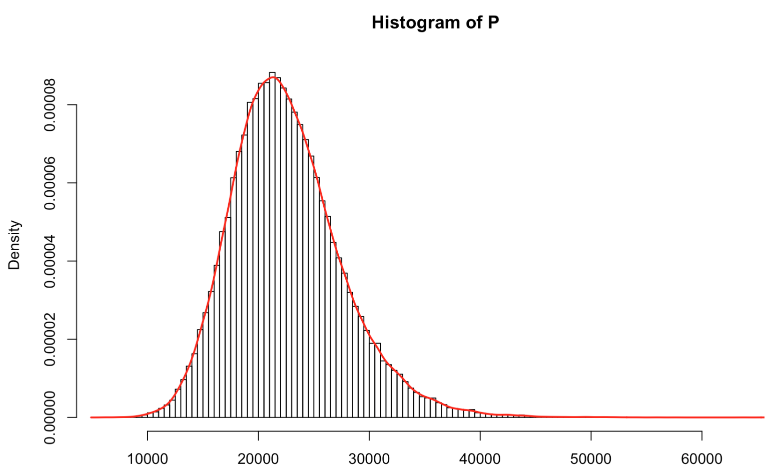

Figura 6: Densidad final de P

(Hint: Basado en mis simulaciones obtuve que $\hat{P} := \$22,573.67$)